۱. نشان دهید که هر منیفلد توپولوژی n بعدی، اجتماعی حداکثر شمارا از منیفلدهای توپولوژی همبند n بعدی است.

۶. نشان دهید که مجموعه نقاطی $(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4$ که $x^2+y^2=z^2+t^2=1/2$، همراه با توپولوژی زیرفضایی از $\mathbb{S}^4$، با تیوب $\mathbb{T}=\mathbb{S}^1\times\mathbb{S}^1$ همئومورف است. به صورت مشابه، زیرمجموعه‌ای از $\mathbb{S}^{2n-1}$ بیابید که با $\mathbb{T}^n := \mathbb{S}^1\times\cdots\times\mathbb{S}^1$ (n بار) همئومورف باشد.

۲۹. ثابت کنید نگاشت $\varphi : \mathbb{S}^2 \to \mathbb{S}^2$ با ضابطه $\varphi(x,y,z) = (x\cos z - y\sin z, x\sin z + y\cos z, z)$ دیفئومورفیسم است.

۳۰. نشان دهید اگر $f : \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}$ با ضابطه $f(x,y) = \|x\|^2 - y^2$ باشد، آنگاه $f^{-1}(0)$ منیفلد توپولوژی هست ولی منیفلد هموار نیست.

۳۳. کره واحد $\mathbb{S}^2$ و صفحه $P_{a,b,c} : ax+by+cz = 1$ را در نظر بگیرید، که $a^2+b^2+c^2 = 1$. تحت کدام مقادیر از $(a,b,c) \in \mathbb{S}^2$، مجموعه $N_{a,b,c} := \mathbb{S}^2 \cap P_{a,b,c}$ زیرمنیفلد منظم از $\mathbb{S}^2$ می‌شود؟ این مساله را به حالت $\mathbb{S}^n$ می‌توانید تعمیم دهید؟

۳۸. ثابت کنید گروه لی $\mathrm{SO}(n,\mathbb{R}) = \{A \in \mathrm{GL}(n,\mathbb{R}) : A^tA = I_n, \det A = 1\}$ تبدیلات متعامد خاص همبند و فشرده است.

۴۵. گیریم $\{A_\alpha\}$ خانواده‌ای موضعا متناهی از زیرمجموعه‌های در فضای توپولوژی S باشد. نشان دهید که هر مجموعه فشرده K در S دارای یک همسایگی باز W است که تنها تعدادی متناهی از A_α ها را قطع می‌نماید.

۶. میدان‌های برداری $X = \partial_x$ و $Y = f\partial_x + g\partial_y$ بر $\mathbb{R}^2$ را در نظر بگیرید. توابع f و g را طوری تعیین کنید که X, Y پایه‌ای برای یک جبرلی دو بعدی تشکیل دهند.

۱۲. فرض کنیم $f : M \to M_1$، $g : N \to N_1$ و نگاشت $f \times g : M \times N \to M_1 \times N_1$ را به صورت $(x, y) \mapsto (f(x), g(y))$ تعریف نماییم. نشان دهید که اگر f و g ایمرشن باشند، $f \times g$ نیز هست. نتیجه بگیرید که اگر f و g نشاننده باشند، $f \times g$ نیز هست.

۱۸. فرض کنید M و N منیفلد هموار باشند. به هر میدان برداری مفروض $X \in \mathfrak{X}(M)$، میدان برداری $\tilde{X}_{(p,q)} = (X_p, 0_q) \in T_{(p,q)}M \times N$ را متناظر می‌کنیم. به صورت مشابه، به هر میدان برداری $Y \in \mathfrak{X}(N)$، میدان برداری $\tilde{Y}_{(p,q)} = (0_p, Y_q) \in T_{(p,q)}M \times N$ را متناظر می‌سازیم. نشان دهید X با $\tilde{X}$ و Y با $\tilde{Y}$ $F-$مرتبط است. ثابت کنید که همواره $[\tilde{X}, \tilde{Y}] = 0$.

۳۳. فرض کنید $n,k \in \mathbb{N}$، $1 \leq k \leq n$ و $S(n,k)$ مجموعه همه ماتریس‌های حقیقی $n \times n$ متقارن و با رتبه k باشد که در رابطه $A^2 = A$ صدق دارند. نشان دهید $S(n,k)$ منیفلد است. فضای مماس به آن در نقاط مختلف را مشخص نمایید.